UFG
UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

Instituto de Química
IQ - UFG

ENGENHARIA QUÍMICA
Universidade Federal de Goiás

Condução Unidimensional - Regime Estacionário e sem Geração de Energia

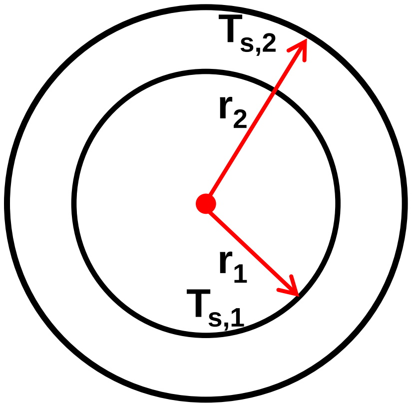
Sistemas Radiais

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
site: www.dyrney.com

3 . Condução Unidimensional

3.3 Sistemas Radiais

(a) Cilindro “infinito”, sem geração de calor



Analisando a equação do calor em coordenadas cilíndricas

$$\rho c_p \cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)} + \cancel{\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)} + \cancel{\dot{Q}}$$

regime estacionário

Condição de simetria

Cilindro infinito

sem geração de energia

Após as definidas simplificações, tem-se:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(kr\frac{dT}{dr}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rq_r\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad rq_r = cte_1$$

Multiplicando ambos os lados por 2πL, sendo L o comprimento, e considerando a área superficial do tubo A=2πLr, tem-se:

$$\left(2\pi L\right) rq_r = cte_1\left(2\pi L\right) \quad \Longrightarrow \quad Q_r = cte_2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{Taxa térmico constante na direção r}}$$

3 . Condução Unidimensional

3.3 Sistemas Radiais

(a) Cilindro "infinito", sem geração de calor

Visto que a condutividade é constante e integrando uma vez, tem-se:

$$\int d\left(r\frac{dT}{dr}\right)=\int 0dr$$

Obtém-se:

$$r\frac{dT}{dr}=C_1 \longrightarrow dT=\frac{C_1}{r}dr$$

Integrando-a novamente:

$$\int dT=\int\frac{C_1}{r}dr \longrightarrow T=C_1\,ln\left(r\right)+C_2$$

sujeito às seguintes condições de contorno: $T\left(r\right)=\begin{cases}T_{s,1} & \text{para } r=r_1\\ T_{s,2} & \text{para } r=r_2\end{cases}$

3 . Condução Unidimensional

3.3 Sistemas Radiais

(a) Cilindro "infinito", sem geração de calor

Substituindo as condições de contorno:

$$T_{s,1} = C_1 \ln(r_1) + C_2$$

$$T_{s,2} = C_1 \ln(r_2) + C_2$$

Resolvendo-as para as constantes:

$$C_1 = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \quad \textbf{e} \quad C_2 = T_{s,1} - \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \ln(r_1)$$

Substituindo na solução geral, a distribuição de temperaturas é então:

$$\boxed{T(r) = T_{s,1} + \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln(r_1 / r_2)} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}$$

Obs: Temperatura varia logaritmicamente com a posição radial em geometrias cilíndricas

3 . Condução Unidimensional

3.3 Sistemas Radiais

(a) Cilindro “infinito”, sem geração de calor

Utilizar a lei de Fourier para a determinação da taxa de calor por condução.

$$Q_r = -k\left(2\pi rL\right)\frac{dT}{dr} \quad \longrightarrow \quad Q_r = -k\left(2\pi rL\right)\left[0 + \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{ln\left(r_1 / r_2\right)}\frac{1}{r}\right]$$

Rearranjando:

$$\boxed{Q_r = \frac{\left(T_{s,1} - T_{s,2}\right)}{ln\left(r_2 / r_1\right)/2\pi Lk}}$$

Por analogia ao transporte de calor em coordenadas cartesianas, tem-se a resistência condutiva em coordenadas cilíndricas

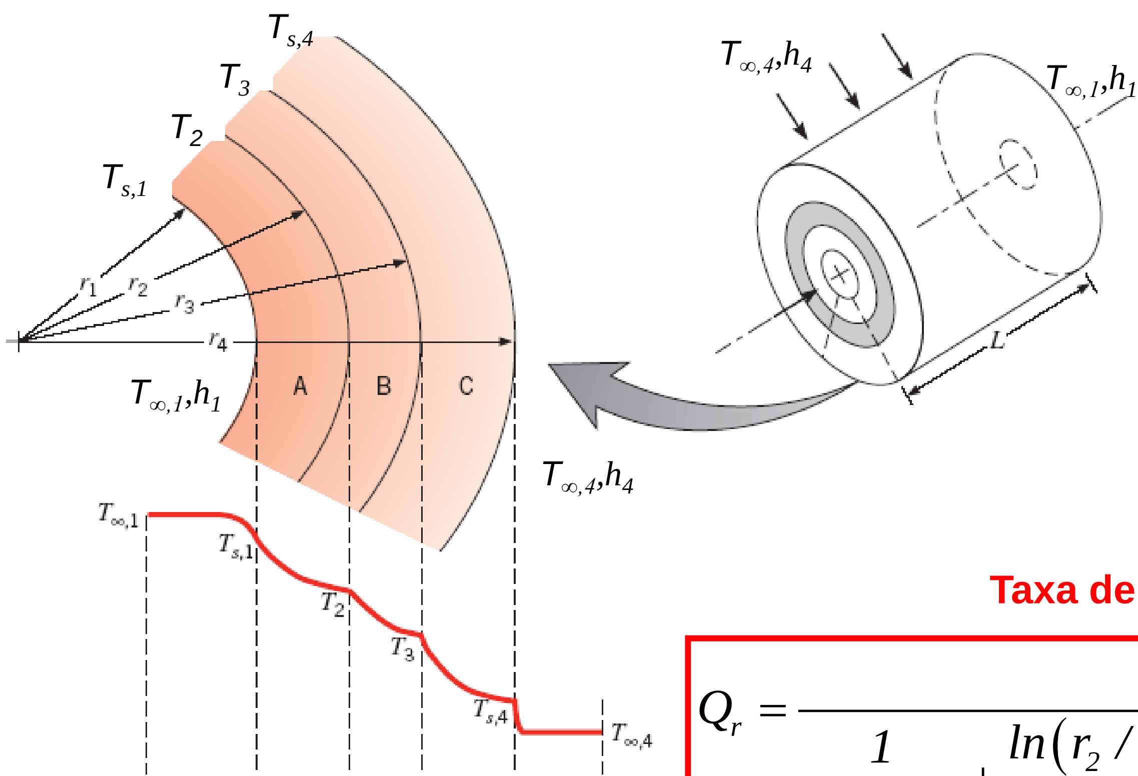
$$\boxed{R_{term,cond} = \frac{ln\left(r_2 / r_1\right)}{2\pi Lk}}$$

3 . Condução Unidimensional

3.3 Sistemas Radiais

(a) Cilindro “infinito”, sem geração de calor

Considerando um sistema de cilindros compostos



Taxa de transferência de calor:

$$Q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{\dfrac{1}{2\pi r_1 L h_1}} = \frac{T_{s,1} - T_2}{\dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_A L}} = \frac{T_2 - T_3}{\dfrac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_B L}} = \frac{T_3 - T_{s,4}}{\dfrac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi k_C L}} = \frac{T_{s,4} - T_{\infty,4}}{\dfrac{1}{2\pi r_4 L h_4}}$$

Taxa de transferência de calor global:

$$\boxed{Q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\dfrac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_A L} + \dfrac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_B L} + \dfrac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi k_C L} + \dfrac{1}{2\pi r_4 L h_4}}}$$

3 . Condução Unidimensional

3.3 Sistemas Radiais

(a) Cilindro “infinito”, sem geração de calor

Conceito do raio crítico de isolamento

1° passo: Esquematize o problema.

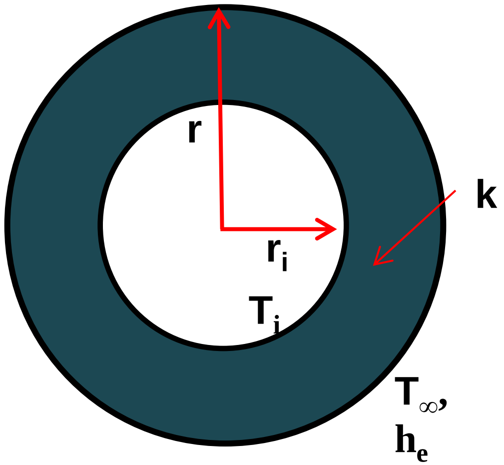
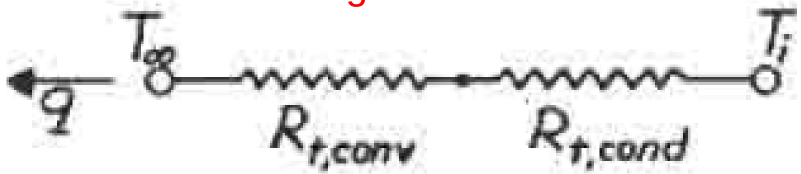


Diagrama térmico



2° passo: Estabeleça as hipóteses

- ✓ condição de estado estacionários;
- ✓ condução unidimensional (radial – r)
- ✓ propriedades físicas constantes
- ✓ perda por radiação desprezível

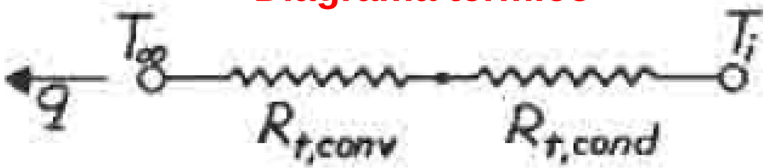
3 . Condução Unidimensional

3.3 Sistemas Radiais

(a) Cilindro "infinito", sem geração de calor

Conceito do raio crítico de isolamento

Diagrama térmico



Taxa de calor através do circuito:

$$Q_r = \frac{(T_i - T_\infty)}{R_{tot}}$$

Sendo a resistência total dada por:

$$R_{tot} = R_{term,conv} + R_{term,cond}$$

$$R_{term,conv} = \frac{1}{hA_s} = \frac{1}{2\pi r L h}$$

$$R_{term,cond} = \frac{\ln(r/r_i)}{2\pi k L}$$

Para determinar o valor de r que minimiza Q_r ou máxima R_{tot}, deve-se fazer:

$$\frac{dR_{tot}}{dr} = 0$$

Logo,

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{2\pi r L h} + \frac{\ln(r/r_i)}{2\pi k L}\right] = 0$$

$$\left[-\frac{1}{2\pi h L r^2} + \frac{1}{2\pi k L r}\right] = 0$$

3 . Condução Unidimensional

3.3 Sistemas Radiais

(a) Cilindro "infinito", sem geração de calor

Conceito do raio crítico de isolamento

Isolando r, tem-se:

$$r = \frac{k}{h}$$

Para determinar se o resultado anterior maximiza ou minimiza a resistência total, a segunda derivada deve ser avaliada

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{dR_{tot}}{dr}\right] = -\frac{1}{2\pi k L r^2} + \frac{1}{\pi r^3 h L}$$

em r = k/h, tem-se:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{dR_{tot}}{dr}\right] = \frac{1}{\pi L\left(k/h\right)^2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k}\right)$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{dR_{tot}}{dr}\right] = \frac{1}{2\pi L k^3/h^2}$$

Logo,

$$\frac{d^2 R_{tot}}{dr^2} > 0$$

OBS:

1) Neste caso, r=k/h é o raio do isolante para o qual a resistência total é um mínimo e não um máximo;

2) Deve-se pensar r como sendo o raio crítico do isolante ($r_{cr}=k_{iso}/h$), abaixo do qual Q_r aumenta com o aumento do raio do isolante (r_{iso}) e acima do qual Q_r diminui com o aumento de r_{iso}.

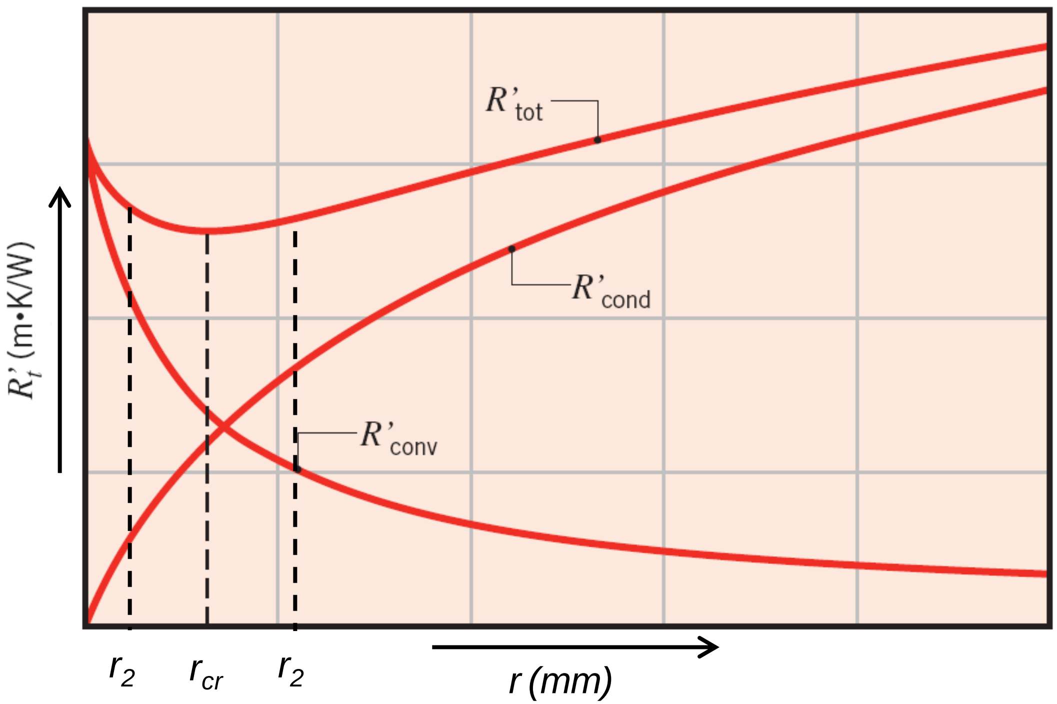
3 . Condução Unidimensional

3.3 Sistemas Radiais

(a) Cilindro “infinito”, sem geração de calor

Conceito do raio crítico de isolamento

Análise do raio crítico (r_{cr})



Se $r_2 < r_{cr}$, a resistência térmica total decresce e, portanto, a taxa de transferência de calor aumenta com a adição do isolante. Isto acontece até que o raio externo do isolante atinja o valor do raio crítico.

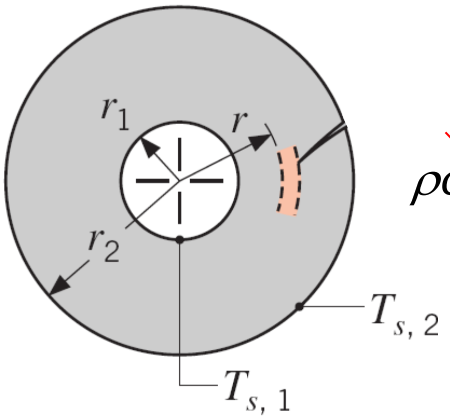
Se $r_2 > r_{cr}$, qualquer adição de isolamento aumenta a resistência térmica total e, portanto, diminui a perda de calor.

Obs: Em uma parede plana (área normal à transferência de calor é constante), a resistência total sempre aumenta com o aumento da espessura do isolante.

3 . Condução Unidimensional

3.3 Sistemas Radiais

(b) Condução em uma casca esférica, sem geração de calor



Analisando a equação do calor em coordenadas esféricas

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(ksen\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \dot{Q}$$

regime estacionário

Condição de simetria

sem geração de energia

Após as devidas simplificações, tem-se:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(kr^2\frac{dT}{dr}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 q_r\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 q_r = cte_1$$

Multiplicando ambos os lados por 4π, e considerando a área superficial da esfera $A=4\pi r^2$, tem-se:

$$(4\pi) r^2 q_r = cte_1 (4\pi) \quad \Rightarrow \quad Q_r = cte_2 \quad \Rightarrow$$

Taxa térmico constante na direção r

3 . Condução Unidimensional

3.3 Sistemas Radiais

(b) Condução em uma casca esférica, sem geração de calor

Visto que a condutividade é constante e integrando uma vez, tem-se:

$$\int d\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = \int 0 dr$$

Obtém-se:

$$r^2 \frac{dT}{dr} = C_1 \longrightarrow dT = \frac{C_1}{r^2} dr$$

Integrando-a novamente:

$$\int dT = \int \frac{C_1}{r^2} dr \longrightarrow T = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

sujeito às seguintes condições de contorno: $T(r) = \begin{cases} T_{s,1} & \text{para } r = r_1 \\ T_{s,2} & \text{para } r = r_2 \end{cases}$

3 . Condução Unidimensional

3.3 Sistemas Radiais

(b) Condução em uma casca esférica, sem geração de calor

Substituindo as condições de contorno:

$$T_{s,1} = -\frac{C_1}{r_1} + C_2 \qquad \text{e} \qquad T_{s,2} = -\frac{C_1}{r_2} + C_2$$

Resolvendo-as para as constantes:

$$C_1 = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)} \qquad \text{e} \qquad C_2 = T_{s,1} + \frac{1}{r_1}\frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}$$

Substituindo na solução geral, a distribuição de temperaturas é então:

$$\boxed{T(r) = T_{s,1} - \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)}$$

Obs: Temperatura varia hiperbolicamente com a posição radial em geometrias esféricas

3 . Condução Unidimensional

3.3 Sistemas Radiais

(b) Condução em uma casca esférica, sem geração de calor

Utilizar a lei de Fourier para a determinação da taxa de calor por condução.

$$Q_r = -k\left(4\pi r^2\right)\frac{dT}{dr} \longrightarrow Q_r = -k\left(4\pi r^2\right)\left[0 - \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\right]$$

Rearranjando:

$$\boxed{Q_r = \frac{\left(T_{s,1} - T_{s,2}\right)}{\frac{1}{4k\pi}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}}$$

Por analogia ao transporte de calor em coordenadas cartesianas, tem-se a resistência condutiva em coordenadas esféricas

$$\boxed{R_{term,cond} = \frac{1}{4\pi k}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

3 . Condução Unidimensional

(b) Condução em uma casca esférica, sem geração de calor

Exemplo: No tópico anterior foi deduzida uma expressão para o raio crítico do isolante em um tubo cilíndrico isolado. Desenvolva a expressão que seria apropriada para uma esfera isolada.

Solução:

1° passo: Esquematize o problema.

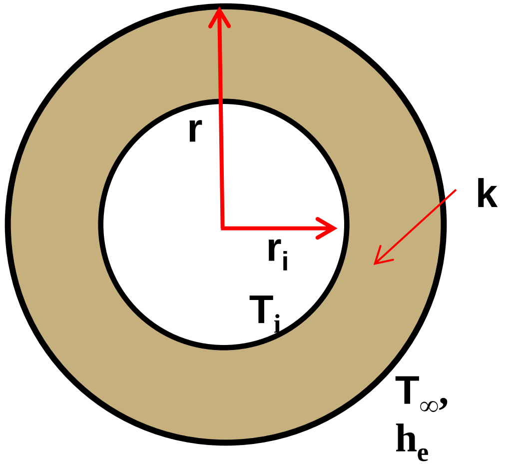
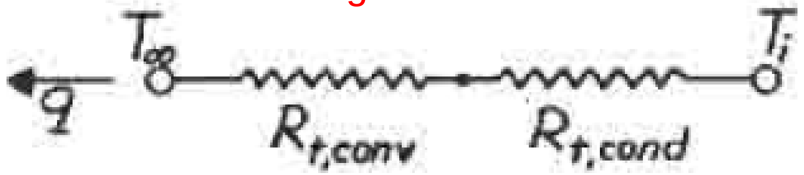


Diagrama térmico



2° passo: Estabeleça as hipóteses

- ✓ condição de estado estacionários;
- ✓ condução unidimensional (radial – r)
- ✓ propriedades físicas constantes
- ✓ perda por radiação desprezível

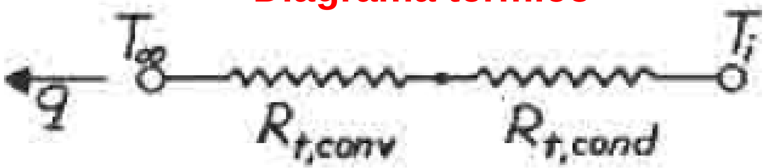
3 . Condução Unidimensional

(b) Condução em uma casca esférica, sem geração de calor

Exemplo: **No tópico anterior foi deduzida uma expressão para o raio crítico do isolante em um tubo cilíndrico isolado. Desenvolva a expressão que seria apropriada para uma esfera isolada.**

Solução:

Diagrama térmico



Taxa de calor através do circuito:

$$Q_r = \frac{(T_i - T_\infty)}{R_{tot}}$$

Sendo a resistência total dada por:

$$R_{tot} = R_{term,conv} + R_{term,cond}$$

$$R_{term,conv} = \frac{1}{hA_s} = \frac{1}{4\pi h r^2}$$

$$R_{term,cond} = \frac{1}{4\pi k}\left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r}\right]$$

Para determinar o valor de r que minimiza Q_r ou máxima R_{tot}, deve-se fazer:

$$\frac{dR_{tot}}{dr} = 0$$

Logo,

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{4\pi k}\left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r}\right] + \frac{1}{4\pi h r^2}\right] = 0$$

$$\left[\frac{1}{4\pi k}\frac{1}{r^2} - \frac{1}{2\pi h}\frac{1}{r^3}\right] = 0$$

3 . Condução Unidimensional

(b) Condução em uma casca esférica, sem geração de calor

Exemplo: No tópico anterior foi deduzida uma expressão para o raio crítico do isolante em um tubo cilíndrico isolado. Desenvolva a expressão que seria apropriada para uma esfera isolada.

Solução:

Isolando r, tem-se:

$$r = 2\frac{k}{h}$$

Para determinar se o resultado anterior maximiza ou minimiza a resistência total, a segunda derivada deve ser avaliada

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{dR_{tot}}{dr}\right] = -\frac{1}{2\pi k}\frac{1}{r^3} + \frac{3}{2\pi h}\frac{1}{r^4}$$

em r = 2k/h, tem-se:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{dR_{tot}}{dr}\right] = \frac{1}{(2k/h)^3}\left\{-\frac{1}{2\pi k} + \frac{3}{2\pi h}\frac{1}{2k/h}\right\}$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{dR_{tot}}{dr}\right] = \frac{1}{(2k/h)^3}\left\{-\frac{1}{2\pi k} + \frac{3}{2\pi h}\frac{1}{2k/h}\right\}$$

Logo,

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{dR_{tot}}{dr}\right] = \frac{1}{(2k/h)^3}\frac{1}{2\pi k}\left\{-1 + \frac{3}{2}\right\} > 0$$

OBS:

1) Neste caso, r=2k/h é o raio do isolante para o qual a resistência total é um mínimo e não um máximo;

2) Deve-se pensar r como sendo o raio crítico do isolante ($r_{cr}=2k_{iso}/h$), abaixo do qual Q_r aumenta com o aumento do raio do isolante (r_{iso}) e acima do qual Q_r diminui com o aumento de r_{iso}.

3 . Condução Unidimensional

3.4 Resumo das equações para solução unidimensional, em regime estacionário, sem geração de calor e k=cte

	Parede Plana	Parede Cilíndrica	Parede Esférica
Equação do calor	$\frac{d^2T}{dx^2}=0$	$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0$	$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=0$
Distribuição de temperatura	$T_{s,1}-\Delta T\frac{x}{L}$	$T_{s,1}+\Delta T\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_1/r_2)}$	$T_{s,1}-\Delta T\left[\frac{1-(r_1/r)}{1-(r_1/r_2)}\right]$
Fluxo térmico (*q*)	$k\frac{\Delta T}{L}$	$\frac{k\Delta T}{r\ln(r_2/r_1)}$	$\frac{k\Delta T}{r^2\left[(1/r_1)-(1/r_2)\right]}$
Taxa de transferência de calor (*Q*)	$kA\frac{\Delta T}{L}$	$\frac{2\pi Lk\Delta T}{\ln(r_2/r_1)}$	$\frac{4\pi k\Delta T}{(1/r_1)-(1/r_2)}$
Resistência térmica ($R_{term,cond}$)	$\frac{L}{kA}$	$\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi Lk}$	$\frac{1}{4\pi k}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$

Obs: O raio crítico do isolamento é $r_{cr}=k_{iso}/h$ para o cilindro e $r_{cr}=2k_{iso}/h$ para a esfera

3 . Condução Unidimensional

Exercício Proposto: Uma esfera oca de alumínio, com um aquecedor elétrico no centro, é usada em testes para determinar a condutividade térmica de materiais isolantes. Os raios interno e externo da esfera são 0,15 e 0,18 m, respectivamente, e os testes são realizados em condições de regime estacionário com a superfície interna do alumínio mantida a 250°C. Em um teste específico, uma casca esférica de isolante é moldada sobre a superfície externa da esfera até uma espessura de 0,12 m. O sistema encontra-se em uma sala na qual a temperatura do ar é de 20°C e o coeficiente de transferência de calor por convecção na superfície externa do isolante é de 30 $W/(m^2.K)$. Se 80 W são dissipados pelo aquecedor em condições de regime estacionário, qual é a condutividade térmica do isolante? Considere a condutividade térmica do alumínio igual a 230W/(m.k).