UFG
UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

Instituto de Química
IQ - UFG

ENGENHARIA QUÍMICA
Universidade Federal de Goiás

Equação Diferencial Geral da Difusão Térmica e Condições de Contorno e Inicial

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
site: www.dyrney.com

2 . Equação da Difusão Térmica

Objetivos

- Determinar o campo de temperaturas em um meio resultante das condições impostas em suas fronteiras (condições de contorno).
- A partir da distribuição de temperaturas, determinar o fluxo de calor por condução em qualquer ponto do meio ou na sua superfície através da lei de Fourier

Algumas aplicações práticas

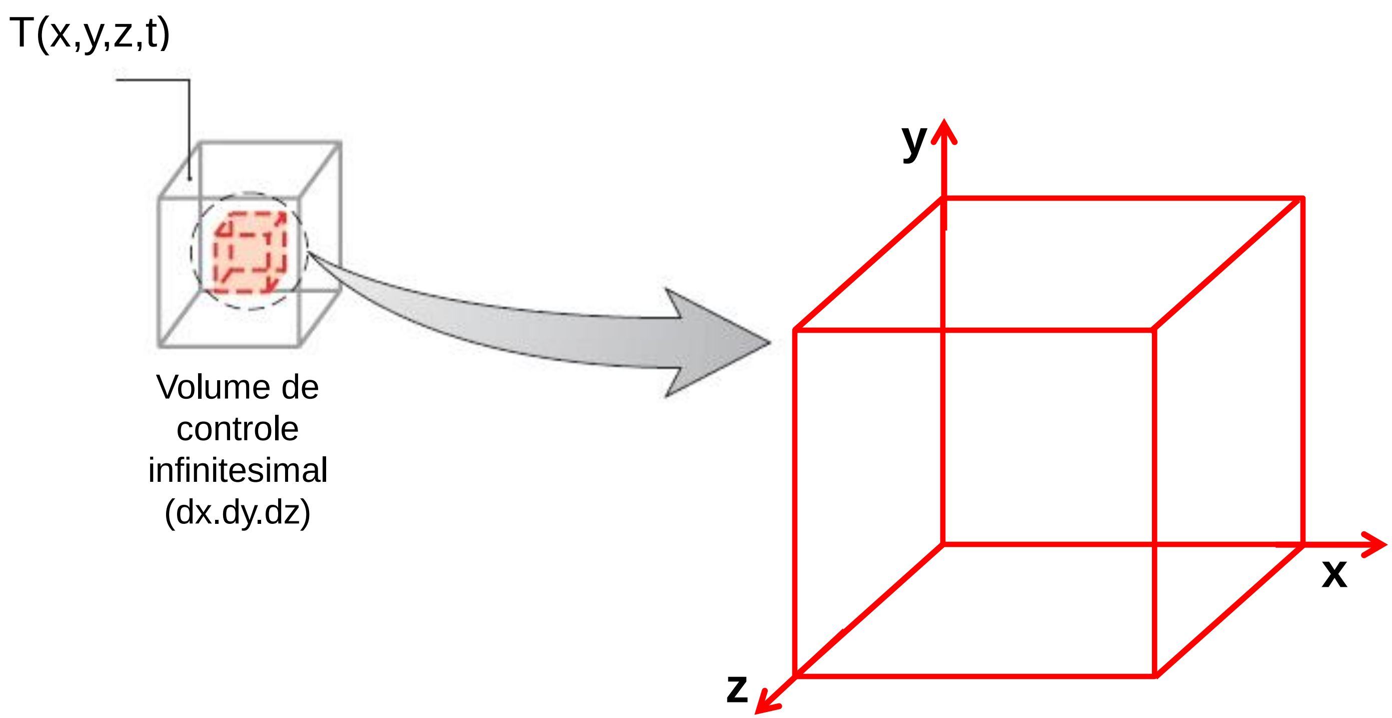
- Averiguar a integridade estrutural de um sólido através da determinação de tensões, expansões e deflexões térmicas;
- Otimizar a espessura de um material isolante em tubulações, etc.;
- Projeto de aletas para aumentar a transferência de calor por convecção para um fluido adjacente, projeto de trocadores de calor, etc.

2 . Equação da Difusão Térmica

2.1 Equação Geral da Difusão Térmica

- **Balanço de Energia em um Volume de Controle Infinitesimal:** **Desprezando o trabalho de eixo e considerando os termos de taxa de energia acumulada no volume (E_{acu}), taxa total de energia que entra (E_{ent}), taxa total energia que sai (E_{sai}) e taxa total de energia gerada no interior do volume (E_g).**

$$E_{acu} = E_{ent} - E_{sai} + E_g$$

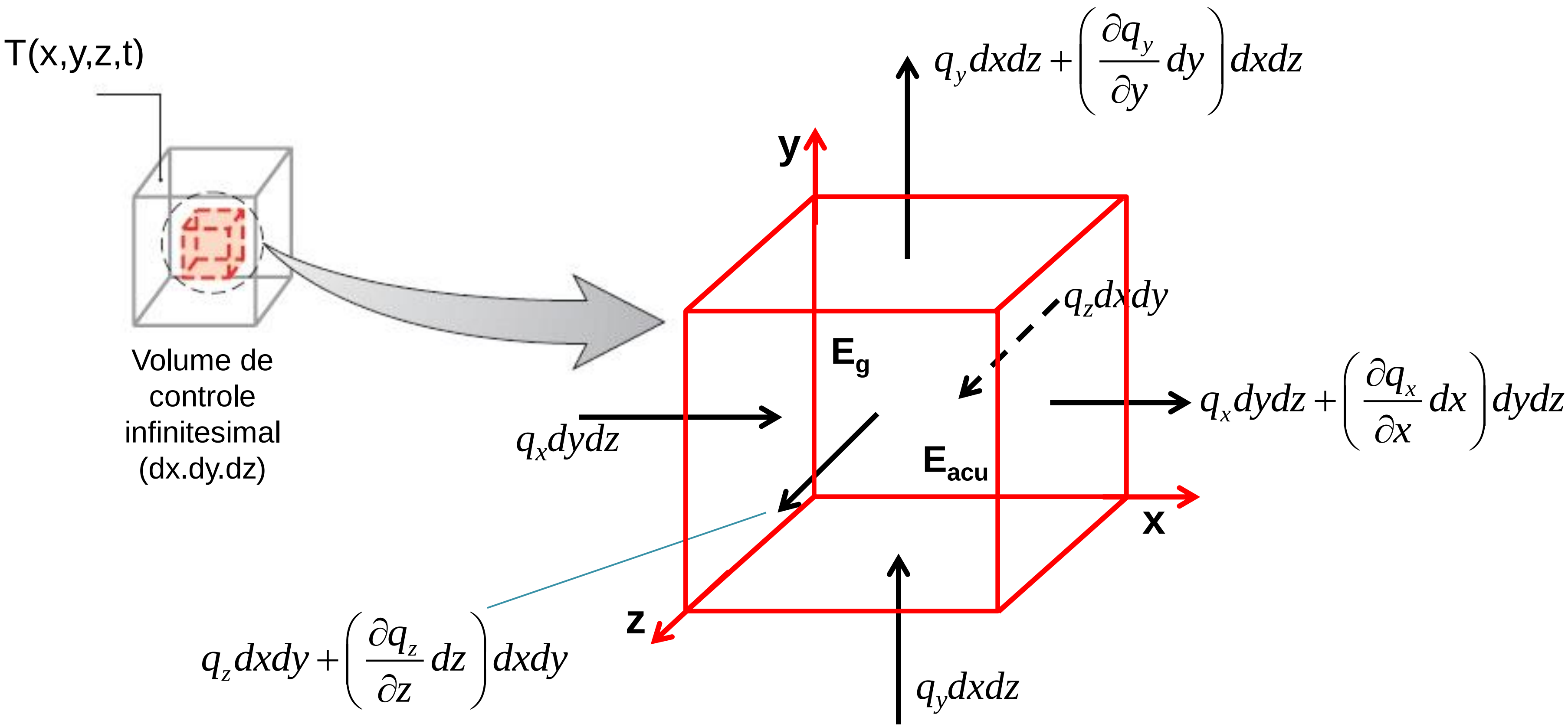


2 . Equação da Difusão Térmica

2.1 Equação Geral da Difusão Térmica

Taxa líquida de calor através de um Volume de Controle Infinitesimal

Considerações: meio homogêneo; não há movimento macroscópico (advecção); distribuição de temperaturas T(x,y,z,t) está representada em coordenadas cartesianas.



2 . Equação da Difusão Térmica

2.1 Equação Geral da Difusão Térmica

Taxas de transferência de calor por condução perpendiculares a cada uma das faces do volume de controle, tanto para entrada como para saída

Faces	Taxa de calor de entrada (E_{ent})	Taxa de calor de saída (E_{sai})
x	$q_x dydz$	$q_x dydz + \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dydz$
y	$q_y dxdz$	$q_y dxdz + \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dxdz$
z	$q_z dxdy$	$q_z dxdy + \left(\frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) dxdy$

2 . Equação da Difusão Térmica

2.1 Equação Geral da Difusão Térmica

- No interior do meio pode haver, também, um termo de fonte de energia (E_g) associado à taxa de geração de energia térmica. Este termo é representado por:

$$\boxed{E_g = \dot{Q}dxdydz}$$

sendo $\dot{Q}$ a taxa na qual a energia é gerada ou consumida por unidade de volume do meio (W/m³).

- Além disto podem ocorrer também variações na energia total (*e*) por unidade de massa no interior do volume de controle (energia interna, cinética e potencial).

$$E_{acu} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} dxdydz \quad \Longrightarrow \quad E_{acu} = \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{u} + \frac{1}{2}\vec{V}^2 + gz \right) dxdydz$$

Sendo: $\hat{u}$ energia interna específica (por unidade de massa)

$1/2\vec{V}^2$ energia cinética específica (por unidade de massa)

gz energia potencial específica (por unidade de massa)

2 . Equação da Difusão Térmica

2.1 Equação Geral da Difusão Térmica

- **Na ausência de movimento (ou movimento uniforme), não há variações na energia mecânica. Logo,**

$$E_{acu} = \rho \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} dxdydz$$

- **Considere a relação termodinâmica abaixo, sendo $\hat{h}$ *a entalpia específica, P a pressão e V o volume***

$$\hat{h} = \hat{u} + PV$$

derivando e aplicando a regra da cadeia, tem-se:

$$d\hat{h} = d\hat{u} + d\left(PV\right)$$

$$d\hat{h} = d\hat{u} + PdV + VdP$$

2 . Equação da Difusão Térmica

2.1 Equação Geral da Difusão Térmica

- Desprezando a variação do volume e da pressão para um sólido ou um líquido, tem-se:

$$d\hat{h} \approx d\hat{u}$$

Visto que, neste caso:

$$d\hat{h} \approx c_p dT$$

Tem-se, considerando c_p constante, que:

$$\boxed{E_{acu} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz}$$

Sendo:

c_p : calor específico , [J/(kg.°C]

$\rho c_p \, \partial T / \partial t$: taxa de variação da energia sensível (térmica) por unidade de volume

2 . Equação da Difusão Térmica

2.1 Equação Geral da Difusão Térmica

- Finalmente, retornando à equação do balanço de energia no **Volume de Controle Infinitesimal**, tem-se:

$$E_{acu} = E_{ent} - E_{sai} + E_g$$

Substituindo os respectivos termos de energia, tem-se:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz = \cancel{q_x dydz} + \cancel{q_y dxdz} + \cancel{q_z dxdy} - \left(\cancel{q_x dydz} + \frac{\partial q_x}{\partial x} dxdydz \right)$$

$$- \left(\cancel{q_y dxdz} + \frac{\partial q_y}{\partial y} dydxdz \right) - \left(\cancel{q_z dxdy} + \frac{\partial q_z}{\partial z} dzdxdy \right) + \dot{Q} dxdydz$$

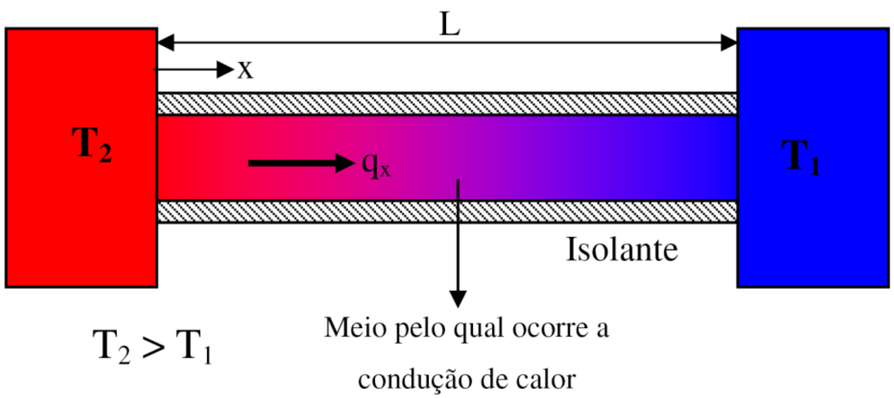
Após simplificações e dividindo tudo pelo volume infinitesimal dxdydz, tem-se:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} + \dot{Q} \quad \Longrightarrow \quad \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla . \vec{q} + \dot{Q}$$

2 . Equação da Difusão Térmica

2.1 Equação Geral da Difusão Térmica

- **O fluxo de calor por condução através do volume de controle pode ser obtido por meio da Equação de Fourier. Considere para ilustração o caso unidimensional na figura abaixo**



Considerando variações infinitesimais na direção do fluxo acima

$$q_x = -k\frac{dT}{dx}$$

O fluxo é uma grandeza vetorial, podendo ser representado como

$$\vec{q} = q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k}$$

2 . Equação da Difusão Térmica

2.1 Equação Geral da Difusão Térmica

- Desta forma, a equação de Fourier pode ser escrita para cada componente (x, y e z). Considerando-se o material isotrópico (as propriedades não variam com a direção, ou seja, $k_x = k_y = k_z = k$), têm-se:

direção x $\rightarrow$ $$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}$$

direção y $\rightarrow$ $$q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y}$$

direção z $\rightarrow$ $$q_z = -k\frac{\partial T}{\partial z}$$

- Substituindo os termos de fluxo, tem-se a forma geral da equação da difusão térmica em coordenadas cartesianas:

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{Q}}$$

2 . Equação da Difusão Térmica

2.1 Equação Geral da Difusão Térmica

- Escrevendo a equação anterior na forma ***compacta*** por meio dos operadores matemáticos ***gradiente*** (∇) e ***divergente*** ($\nabla.$), tem-se

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla.\left(k\nabla T\right) + \dot{Q}}$$

PARA RECORDAR

- ***Gradiente:*** *Função que "aponta" para o aumento da variável transportada. Sendo i, j e k vetores unitários cartesianos.*

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

- ***Divergente:*** *Fluxo líquido da variável transportada, ou seja, o que sai menos o que entra no volume de controle.*

$$\nabla. = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

2 . Equação da Difusão Térmica

2.2 Casos Especiais: Simplificações da Equação da Difusão Térmica

- **(a) Regime em Estado Estacionário:** **sistema independe da variável tempo**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{Q}=0}$$

ou

$$\boxed{\nabla.\left(k\nabla T\right)+\dot{Q}=0}$$

- **(b) Condutividade térmica constante (k = cte)**

$$\boxed{\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{Q}}{k}}$$

ou

$$\boxed{\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}=\nabla^2 T+\frac{\dot{Q}}{k}}$$

Sendo $\alpha = k/\rho c_p$ **a difusividade térmica e** ∇^2 **o operador laplaciano.**

PARA RECORDAR (Laplaciano)

$$\nabla^2=\nabla.\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

2 . Equação da Difusão Térmica

2.2 Casos Especiais: Simplificações da Equação da Difusão Térmica

- **(c) Regime em Estado Estacionário e condutividade térmica constante**

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{Q}}{k} = 0}$$

ou

$$\boxed{\nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{k} = 0}$$

- **(d) Caso mais simples: Regime em Estado Estacionário, condutividade térmica constante e unidimensional (por exemplo, direção x)**

$$\boxed{k \frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right) = 0}$$

ou

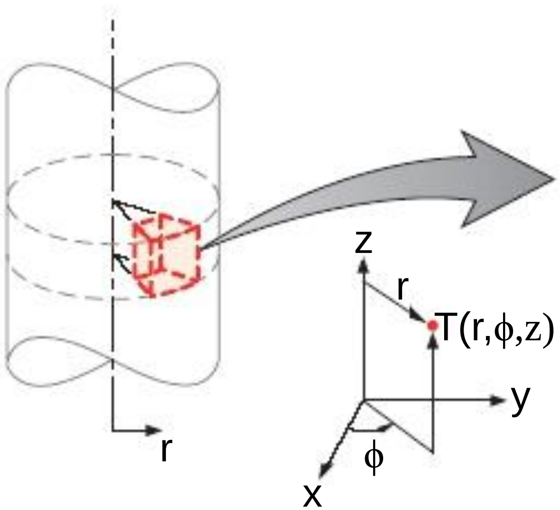
$$\boxed{\nabla^2 T = 0}$$

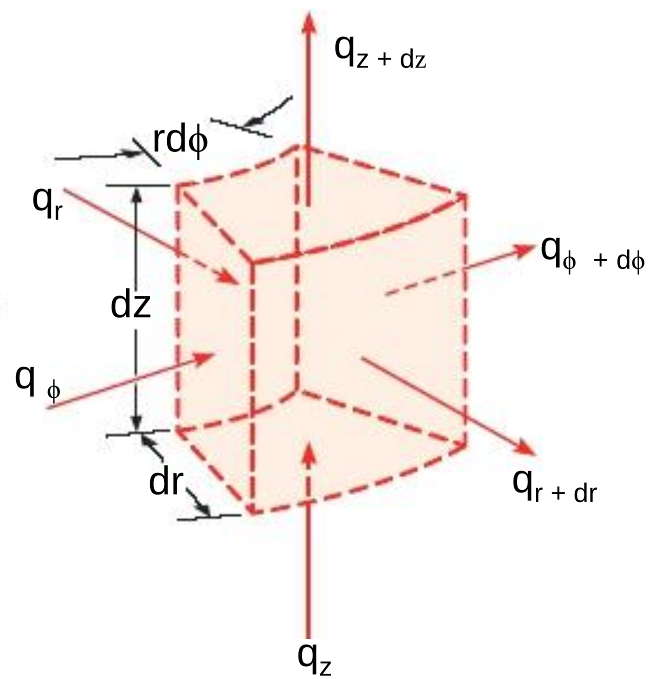
2 . Equação da Difusão Térmica

2.3 Equação da Difusão Térmica em diferentes Sistemas de Coordenadas

(a) Coordenadas Cilíndricas

Volume de controle diferencial, $rd\phi drdz$, para análise da condução em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z).





Área perpendicular a r: $rd\phi dz$

Área perpendicular a z: $rd\phi dr$

Área perpendicular a ϕ***:*** $drdz$

2 . Equação da Difusão Térmica

2.3 Equação da Difusão Térmica em diferentes Sistemas de Coordenadas

(a) Coordenadas Cilíndricas

Para Recordar: ***Gradiente em coordenadas cilíndricas***

- **O gradiente (∇) em coordenadas cilíndricas de uma propriedade escalar qualquer "A" é dado por:**

$$\nabla A = \vec{i}\,\frac{\partial A}{\partial r} + \vec{j}\,\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \phi} + \vec{k}\,\frac{\partial A}{\partial z}$$

- **Logo, a forma geral do fluxo e os seus componentes nas direções radial (r), circunferencial (θ) e axial (z) são, respectivamente:**

$$\vec{q} = -k\nabla T = -k\left(\vec{i}\,\frac{\partial T}{\partial r} + \vec{j}\,\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} + \vec{k}\,\frac{\partial T}{\partial z}\right) \quad \begin{cases} q_r = -k\dfrac{\partial T}{\partial r} \\[2ex] q_\phi = -\dfrac{k}{r}\dfrac{\partial T}{\partial \phi} \\[2ex] q_z = -k\dfrac{\partial T}{\partial z} \end{cases}$$

2 . Equação da Difusão Térmica

2.3 Equação da Difusão Térmica em diferentes Sistemas de Coordenadas

(a) Coordenadas Cilíndricas

Para Recordar: *Divergente em coordenadas cilíndricas*

- **O divergente ($\nabla.$) em coordenadas cilíndricas de uma propriedade vetorial qualquer "B" é dado por:**

$$\nabla.B = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Retornando à Equação da Difusão na forma geral:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla.\left(k\nabla T\right) + \dot{Q}$$

Após as substituições dos termos gradiente e divergente do fluxo, tem-se:

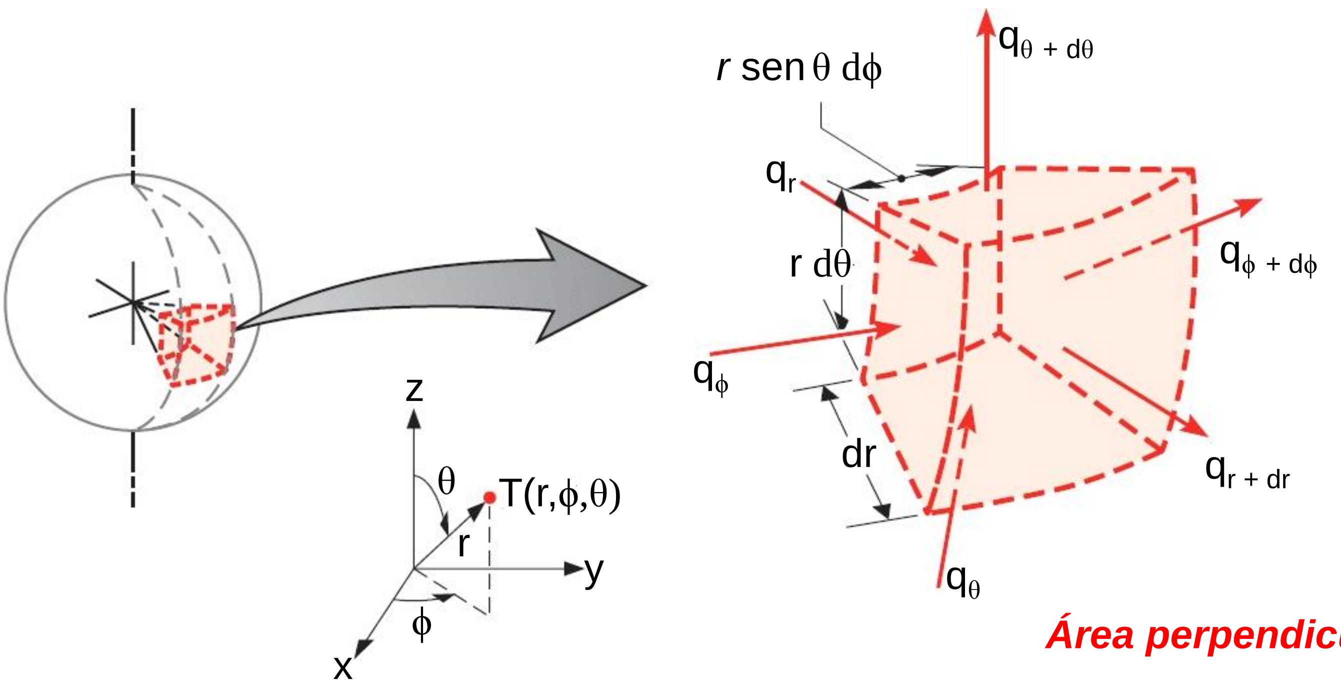
$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{Q}}$$

2 . Equação da Difusão Térmica

2.3 Equação da Difusão Térmica em diferentes Sistemas de Coordenadas

(b) Coordenadas Esféricas

Volume de controle diferencial, $dr.r\,sen(\theta)d\phi.rd\theta$, para análise da condução em coordenadas esféricas (r,ϕ,θ).



Área perpendicular a r: ***$r^2 sen\theta\, d\phi\, d\theta$***

Área perpendicular a ϕ: ***$rd\theta dr$***

Área perpendicular a θ: ***$rsen\theta d\phi dr$***

2 . Equação da Difusão Térmica

2.3 Equação da Difusão Térmica em diferentes Sistemas de Coordenadas

(b) Coordenadas Esféricas

Para Recordar: ***Gradiente em coordenadas esféricas***

- **O gradiente (∇) em coordenadas esféricas de uma propriedade escalar qualquer "A" é dado por:**

$$\nabla A = \vec{i}\,\frac{\partial A}{\partial r} + \vec{j}\,\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta} + \vec{k}\,\frac{1}{r sen\theta}\frac{\partial A}{\partial \phi}$$

- **Logo, a forma geral do fluxo e os seus componentes nas direções radial (r), polar (θ) e azimutal (ϕ) são, respectivamente:**

$$\vec{q} = -k\nabla T = -k\left(\vec{i}\,\frac{\partial T}{\partial r} + \vec{j}\,\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + \vec{k}\,\frac{1}{r sen\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_r = -k\dfrac{\partial T}{\partial r} \\[2ex] q_\theta = -\dfrac{k}{r}\dfrac{\partial T}{\partial \theta} \\[2ex] q_\phi = -\dfrac{k}{r sen\theta}\dfrac{\partial T}{\partial \phi} \end{array} \right.$$

2 . Equação da Difusão Térmica

2.3 Equação da Difusão Térmica em diferentes Sistemas de Coordenadas

(b) Coordenadas Esféricas

Para Recordar: *Divergente em coordenadas esféricas*

- **O divergente ($\nabla.$) em coordenadas esféricas de uma propriedade vetorial qualquer "B" é dado por:**

$$\nabla.B = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 B_r\right) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta B_\theta\right) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi}$$

Retornando à Equação da Difusão na forma geral é dada por:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla.\left(k\nabla T\right) + \dot{Q}$$

Após as substituições dos termos gradiente e divergente do fluxo, tem-se:

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(ksen\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \dot{Q}}$$

2 . Equação da Difusão Térmica

2.4 Condições de Contorno e Condição Inicial

(a) Condição Inicial

Caso o sistema for transiente, a solução depende das condições existentes no meio em algum instante de tempo inicial

Obs: Visto que a Equação da Difusão Térmica é de primeira ordem em relação ao tempo, *apenas uma condição deve ser especificada*, podendo ser uma função do espaço (T(x)) ou uma constante (T_0).

Exemplo: $T(x,t=0)=T(x)$ ou $T(x,t=0)=T_0$

(b) Condição de Contorno

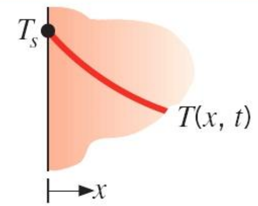
Caso exista um gradiente de temperaturas no meio, a solução depende, também, das condições físicas existentes nas fronteiras deste meio

Obs: Visto que a Equação da Difusão Térmica é de segunda ordem em relação às coordenadas espaciais, *duas condições de contorno devem ser fornecidas para cada coordenada espacial*

2 . Equação da Difusão Térmica

Tipos de condições de contorno para a Equação da Difusão (Ex: em x = 0)

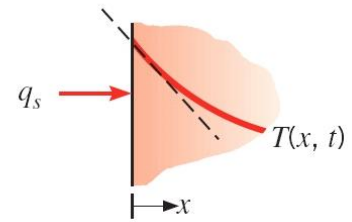
1. Temperatura na superfície constante (Condição de Dirichlet)



$$T\left(0,t\right)=T_s$$

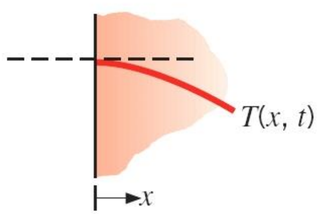
2. Fluxo térmico na superfície constante (Condição de Neumann)

(a) Fluxo térmico constante na superfície



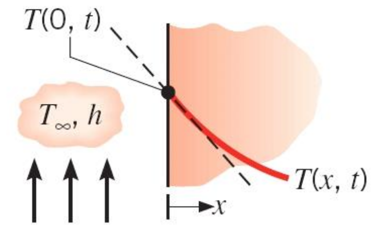
$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=q_s$$

(b) Superfície adiabática ou isolada termicamente



$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=0$$

3. Condição de convecção na superfície (Condição de Robin)



$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=h\left[T_\infty-T\left(0,t\right)\right]$$

2 . Equação da Difusão Térmica

Exercício Proposto: A distribuição de temperaturas ao longo de uma parede com espessura de 1 m, em determinado instante de tempo, é dada por $T(x) = 900 - 300x - 50x^2$, sendo T em °C e x em m. A parede possui uma área da seção transversal de $10 m^2$ e uma taxa de geração de calor de $1000 W/m^3$. As propriedades físicas da parede são: $\rho = 1600 kg/m^3$, $k = 40 W/(m.K)$ e $c_p = 4 kJ/(kg.K)$. Determine: (a) As taxas de transferência de calor que entra na parede (x = 0) e que deixa a parede (x = 1 m); (b) A taxa de variação da energia acumulada na parede; (c) A taxa de variação da temperatura (em relação ao tempo) nas posições x = 0; 0,25 e 0,5 m.

ENGENHARIA QUÍMICA
Universidade Federal de Goiás

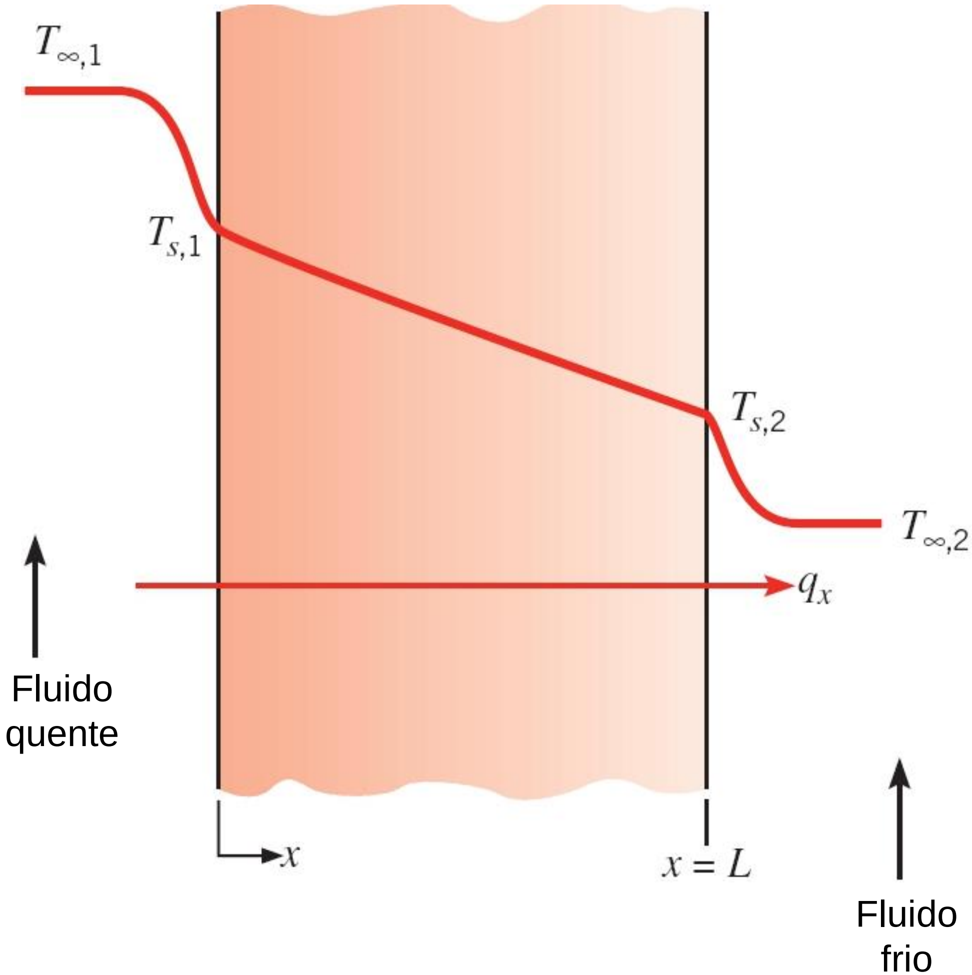
Condução Unidimensional - Regime Estacionário e sem Geração de Energia

Paredes Planas

Professor Dyrney Araújo dos Santos
Universidade Federal de Goiás
site: www.dyrney.com

3 . Condução Unidimensional

3.1 Parede Plana, sem geração interna de energia térmica



Hipóteses:

- **Placa com pequena espessura:** transferência de calor preferencialmente na direção x.
- **Transferência de calor em regime estacionário:** temperatura independe do tempo, logo, T(x)
- **Propriedades físicas do material constantes:** k = cte

3 . Condução Unidimensional

3.1 Parede Plana, sem geração interna de energia térmica

Analisando, primeiramente, as condições no interior da parede tem-se a seguinte forma geral da equação da difusão térmica em coordenadas cartesianas

$$\cancel{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \cancel{\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)} + \cancel{\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)} + \cancel{\dot{Q}}$$

regime estacionário

unidimensional

sem geração de energia

Após as devidas simplificações, tem-se:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) = 0 \longrightarrow \frac{dq_x}{dx} = 0 \longrightarrow$$

Fluxo térmico constante na direção x

Visto que a condutividade é constante e integrando uma vez, tem-se:

$$\int d\left(\frac{dT}{dx}\right) = \int 0\,dx$$

3 . Condução Unidimensional

3.1 Parede Plana, sem geração interna de energia térmica

Obtém-se:

$$\frac{dT}{dx} = C_1$$

Integrando-a novamente:

$$\int dT = \int C_1 dx \longrightarrow T(x) = C_1 x + C_2$$

sujeio às seguintes condições de contorno $\begin{cases} T(0) = T_{s,1} \\ T(L) = T_{s,2} \end{cases}$

Substituindo a condição em x = 0, tem-se:

$$T(x=0) = C_1 0 + C_2$$

$$\boxed{T_{s,1} = C_2}$$

3 . Condução Unidimensional

3.1 Parede Plana, sem geração interna de energia térmica

Substituindo a condição em x = L, tem-se:

$$T(x=L)=C_1L+C_2=C_1L+T_{s,1}$$

$$\boxed{C_1=\frac{T_{s,2}-T_{s,1}}{L}}$$

Substituindo na solução geral, a distribuição de temperaturas é então:

$$\boxed{T(x)=\left(T_{s,2}-T_{s,1}\right)\frac{x}{L}+T_{s,1}}$$

Obs: Para a condução unidimensional em regime estacionário em uma parede plana sem geração de calor e condutividade térmica constante, a temperatura varia linearmente com x.

3 . Condução Unidimensional

3.1 Parede Plana, sem geração interna de energia térmica

Agora que se tem a distribuição de temperaturas, pode-se utilizar a lei de Fourier para a determinação da taxa de transferência de calor por condução.

$$\boxed{Q_x = -kA\frac{dT}{dx} = \frac{kA}{L}\left(T_{s,1} - T_{s,2}\right)}$$

Rearranjando:

$$Q_x = \frac{\left(T_{s,1} - T_{s,2}\right)}{\dfrac{L}{kA}}$$

OBS: Nota-se uma analogia entre as difusões de calor e de carga (Lei de Ohm). Da mesma maneira que uma resistência elétrica está associada à condução de eletricidade, uma resistência térmica pode ser associada à condução de calor.

$$\text{corrente elétrica} = \frac{\text{diferença de potêncial elétrico}}{\text{resistência elétrica}}$$

3 . Condução Unidimensional

3.1 Parede Plana, sem geração interna de energia térmica

Desta forma, a resistência térmica na condução em uma parede plana é:

$$\boxed{R_{term,cond} = \frac{L}{kA}}$$

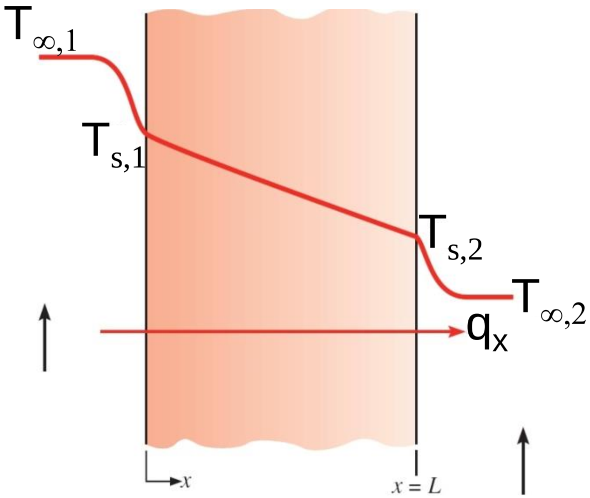
OBS: A = área da seção transversal

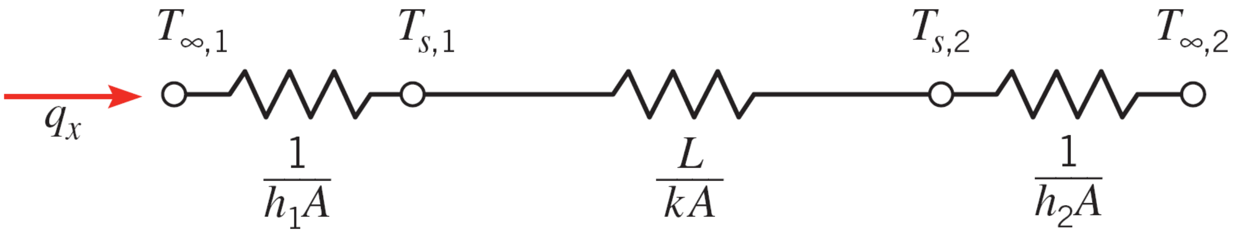
Uma resistência térmica pode também ser associada à transferência de calor por convecção em uma superfície. A partir da lei do resfriamento de Newton, tem

$$Q = hA\left(T_s - T_\infty\right) \rightarrow \boxed{R_{term,conv} = \frac{1}{hA}}$$

OBS: A = área superficial

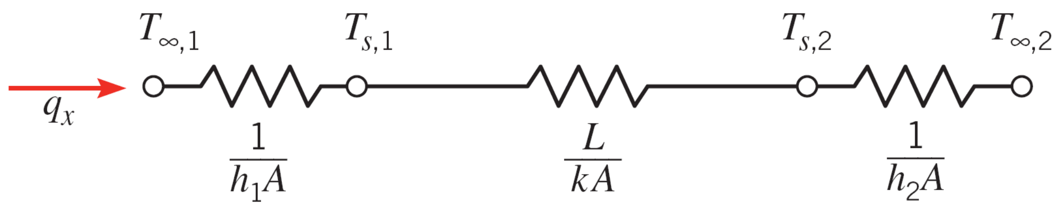
Circuito térmico equivalente para a parede plana com condução e convecção nas superfícies





3 . Condução Unidimensional

3.1 Parede Plana, sem geração interna de energia térmica



A taxa de transferência de calor pode ser determinada pela consideração em separado de cada elemento da rede (em série). Uma vez que Q_x é **constante** ao longo da rede, tem-se que

$$Q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{\dfrac{1}{h_1 A}} = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\dfrac{L}{kA}} = \frac{T_{s,2} - T_{\infty,2}}{\dfrac{1}{h_2 A}}$$

Em termos da diferença de temperatura global, $T_{\infty,1}$-$T_{\infty,2}$, a taxa de transferência de calor pode ser expressa, de uma forma global, como

$$\boxed{Q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{\dfrac{1}{h_1 A} + \dfrac{L}{kA} + \dfrac{1}{h_2 A}}}$$

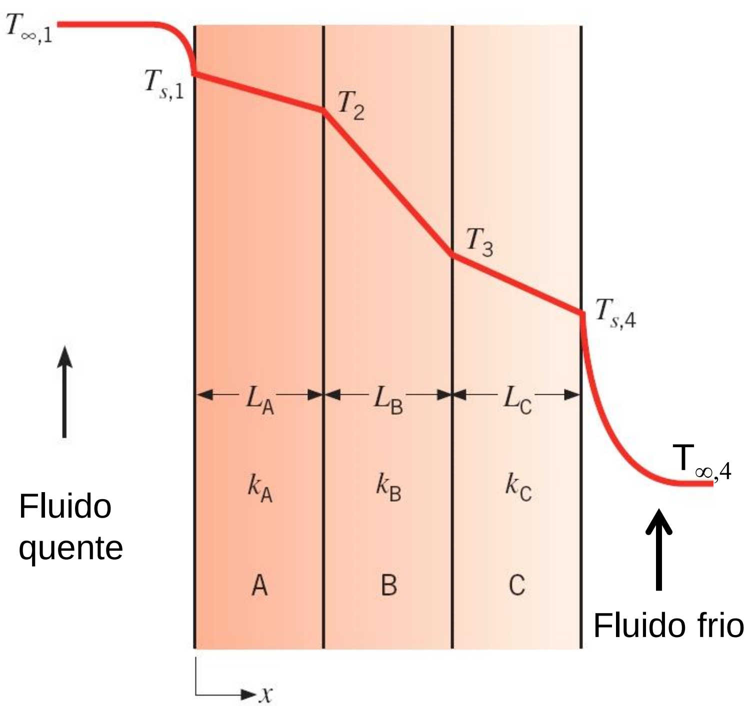
ou

$$\boxed{Q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{R_{total}}}$$

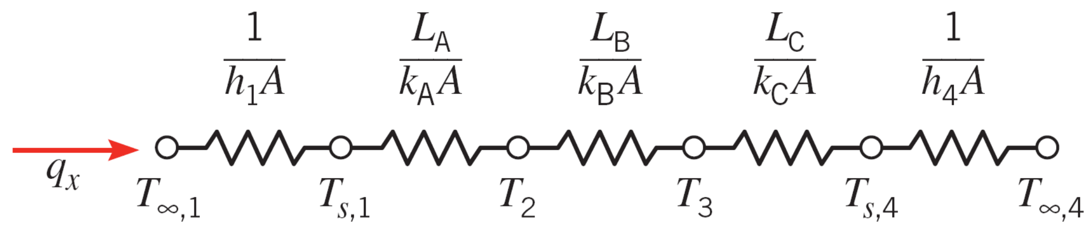
3 . Condução Unidimensional

3.2 Parede Plana Composta, sem geração interna de energia

(a) Paredes em série



Circuito térmico



Neste caso, tem-se:

$$Q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{(1/h_1 A)} = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{(L_A/k_A A)} = \frac{T_2 - T_3}{(L_B/k_B A)} =$$

$$= \frac{T_3 - T_{s,4}}{(L_C/k_C A)} = \frac{T_{s,4} - T_{\infty,4}}{(1/h_4 A)}$$

ou, em termos globais, tem-se

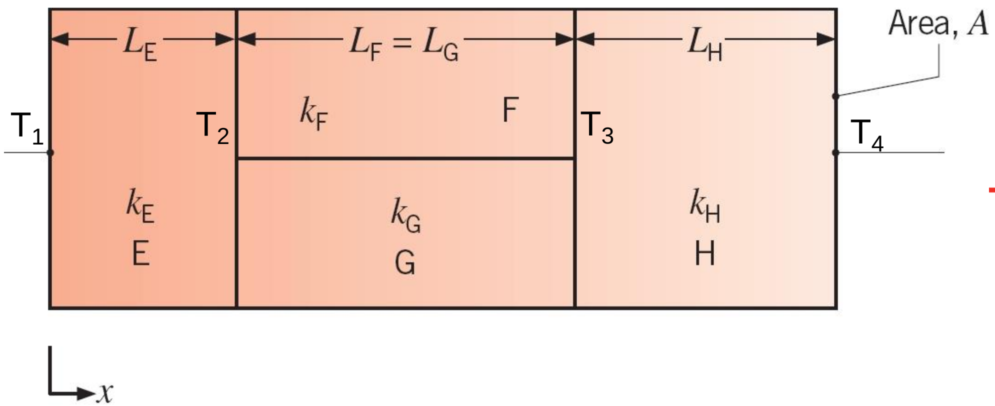
$$\boxed{Q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\left[(1/h_1 A) + (L_A/k_A A) + (L_B/k_B A) + (L_C/k_C A) + (1/h_4 A)\right]}}$$

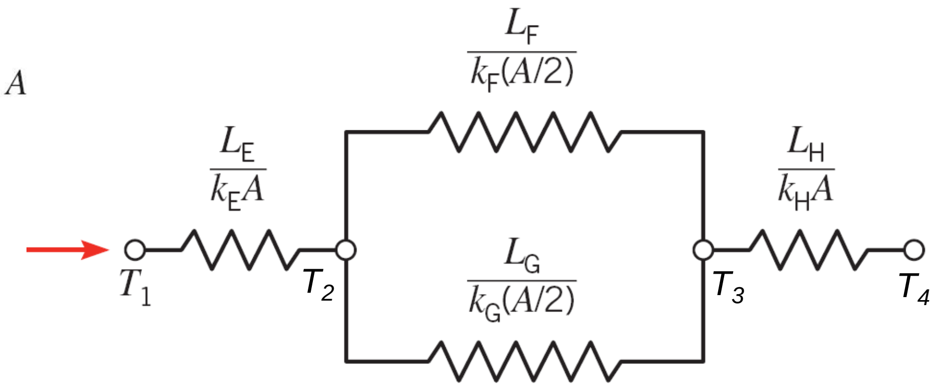
3 . Condução Unidimensional

3.2 Parede Plana Composta, sem geração interna de energia

(b) Paredes em paralelo

Considerando-se que as superfícies normais à direção x são isotérmicas, tem-se:





Neste caso, tem-se:

$$Q_x = \frac{T_1 - T_2}{\dfrac{L_E}{k_E A}} = \frac{T_2 - T_3}{\dfrac{1}{\dfrac{k_F(A/2)}{L_F} + \dfrac{k_G(A/2)}{L_G}}} = \frac{T_3 - T_4}{\dfrac{L_H}{k_H A}}$$

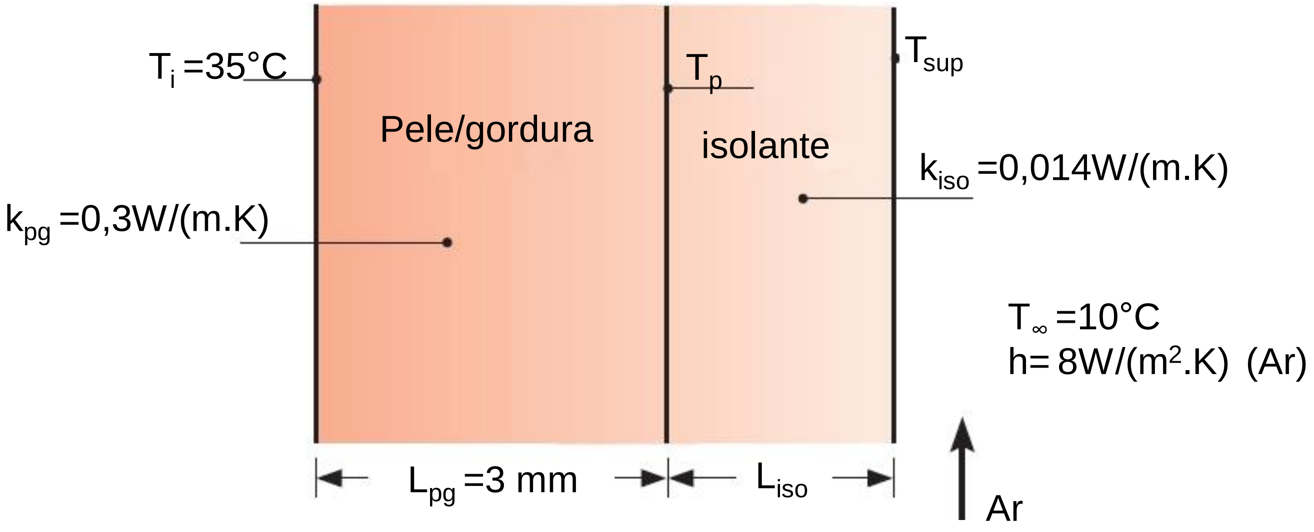
ou, em termos globais, tem-se

$$Q_x = \frac{T_1 - T_4}{\dfrac{L_E}{k_E A} + \dfrac{1}{\dfrac{k_F(A/2)}{L_F} + \dfrac{k_G(A/2)}{L_G}} + \dfrac{L_H}{k_H A}}$$

3 . Condução Unidimensional

Exercício 1: **Com a perspectiva de calcular a transferência de calor entre um corpo humano e sua vizinhança (T_{viz}=10°C), focamos em uma camada de pele e gordura, com sua superfície externa exposta ao ambiente e sua superfície interna um pouco abaixo da temperatura corporal, T_i=35°C. Considere a camada de pele/gordura com espessura de 3 mm e com condutividade térmica k_{pg}=0,3W/(m.K). Para reduzir a taxa de perda de calor, a pessoa veste roupas especiais esportivas (condutividade térmica igual a 0,014W/(m.K). (a) Qual a espessura do isolante necessária para reduzir a taxa da perda de calor para 100W? (b) Qual a temperatura resultante da pele (T_P)?**

OBS: Considere a área da seção transversal igual a 1,8 m²



3 . Condução Unidimensional

Exercício Proposto: As paredes de uma geladeira são tipicamente construídas com uma camada de isolante entre dois painéis de folhas de metal. Considere uma parede feita com isolante de fibra de vidro, com condutividade térmica k_i = 0,046 W/(m.K) e espessura L_i = 50 mm, e painéis de aço, cada um com condutividade térmica k_p = 60 W/(m.K) e espessura L_p = 3 mm. Com a parede separando ar refrigerado a $T_{\infty,i}$ = 4°C do ar ambiente $T_{\infty,e}$ = 25°C, determine o ganho de calor por unidade de área superficial. Os coeficientes associados à convecção natural nas superfícies interna e externa podem ser aproximados por $h_i = h_e$ = 5 W/(m^2.k).